

УДК 539.4

О ТОЧНОСТИ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В СЛАБОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ СРЕДАХ

Ю.С. Холодняк¹, А.В. Периг², С.В. Капорович³

¹кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики, Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск, Украина, e-mail: kholodnyack.yu@yandex.ua

²кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизация производственных процессов, Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск, Украина, e-mail: olexander.perig@gmail.com

³кандидат технических наук, ст.преподаватель кафедры технической механики, Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск, Украина, e-mail: kaporovych@yandex.ru

Аннотация. Выполнена оценка точности существующей методики прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям. Показано, что эта методика существенно занижает величины динамических усилий и напряжений в колеблющихся конструкциях, причем тем сильнее, чем меньше сопротивление среды. Даны рекомендации по совершенствованию указанной методики. Статья может быть полезна студентам, преподавателям ВУЗов и практическим специалистам, выполняющим прочностные расчеты.

Ключевые слова: стержневая конструкция, вынужденные колебания, прочность, влияние параметров, методика расчета.

CONCERNING ACCURACY OF STRENGTH ESTIMATIONS FOR FRAMED STRUCTURES UNDER FORCED VIBRATIONS IN WEAK-RESISTANT MEDIA

Yuri S. Kholodnyak¹, Alexander V. Perig², Svitlana V. Kaporovych³

¹Ph.D., Associate Professor of Technical Mechanics Department, Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine, e-mail: kholodnyack.ya@yandex.ua

²Ph.D., Associate Professor of Manufacturing Processes and Automation Engineering Department, Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine, e-mail: olexander.perig@gmail.com

³Ph.D., Senior Lecturer of Technical Mechanics Department, Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine, e-mail: al-sv@mail.ru

Abstract. An engineering estimation of accuracy of existing strength estimation technique has been derived for forced vibrations of framed structure. It has been shown that existing strength estimation technique essentially lowers the values of dynamic loads and stresses in oscillated structures, and the smaller is resistance of medium, the lower is strength estimation with existing strength estimation technique. The recommendations concerning improvement of existing technique have been proposed. The proposed approach, reported in

this article, can be useful for students, university lectures and practical specialists in mechanics of materials.

Keywords: *framed system, forced vibrations, strength estimation, parameters' influence, computational technique.*

Введение. Вынужденные колебания стержневых конструкций (балок, рам, ферм) возникают вследствие воздействия на них так называемых возмущающих сил. Наиболее часто источником таких сил является работа различного оборудования, установленного на этих конструкциях и оказывающего на них периодически изменяющееся силовое воздействие.

В колеблющихся конструкциях возникают дополнительные (динамические) нагрузки, которые в ряде случаев достигают значительных величин. Отсюда – важность адекватного учета этих нагрузок в прочностных расчётах названных конструкций.

Механические колебания вообще и вынужденные колебания в частности достаточно полно и всесторонне исследованы в литературе. Вместе с тем специфика этих колебаний в практических расчётах часто учитывается не в полной мере, что чревато получением искажённых результатов.

Так, при определении максимальных напряжений, возникающих в колеблющихся конструкциях, обычно упускается из виду начальная стадия процесса, в которой наряду с вынужденными колебаниями присутствуют и колебания собственные. Такое упрощение оправдывается тем, что собственные колебания со временем затухают из-за сопротивления среды [1-3]. Однако силовое воздействие на конструкцию максимально именно в начале колебательного процесса, когда в нём присутствуют оба из обозначенных колебаний, накладывающихся друг на друга и образующих хаотические движения – биения. При малом сопротивлении среды (например, воздушной) им обычно пренебрегают. В этом случае вообще теряется из виду реальный характер колебательного процесса, полностью превращающегося в биения. Погрешность, вносимая указанными подходами, неизвестна. На ее оценку и минимизацию нацелена настоящая работа, являющаяся логическим продолжением работ авторов по вопросам прочности стержневых конструкций [4-7].

Цель работы. Целью работы является анализ влияния параметров колебательного процесса на точность прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям, и поиск путей совершенствования методики таких расчетов.

Материал и результаты исследований. Рассмотрим вначале конкретную задачу определения максимальных нормальных напряжений, возника-

ющих в стальной консольной балке при работе установленного на ней электродвигателя со статически неотбалансированным ротором. Задача именно такого типа предлагается студентам в сборнике заданий к выполнению расчетно-графических работ по курсу сопротивления материалов [8].

Задачу решим при следующих исходных данных и допущениях. Масса электродвигателя $m = 1000$ кг, его частота вращения $n_{дв} = 1000$ об/мин; модуль возмущающей силы $H = 0,3 \cdot mg$ ($g = 9,81$ м/с² – ускорение силы тяжести); поперечное сечение балки – двутавр 20 ($I_x = 1840$ см⁴; $W_x = 184$ см³, её массой пренебрегаем). Колебания начинаются вследствие включения электродвигателя, т. е. при нулевых начальных условиях. Колебания происходят в воздушной среде; горизонтальными (продольными) колебаниями пренебрегаем, поскольку напряжения от них пренебрежимо малы по сравнению с таковыми от изгиба балки. Начало координат совмещаем с положением статического равновесия электродвигателя, определяемого величиной статической деформации конца балки – $\Delta_{ст}$ (рис. 1).

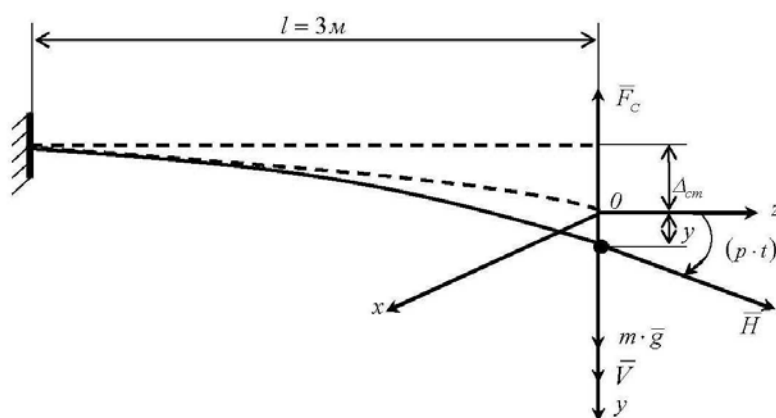


Рисунок 1 – Схема к решению задачи

С учётом принятых допущений дифференциальное уравнение вертикальных колебаний системы «электродвигатель – невесомая балка» имеет вид [2]:

$$\ddot{y} + 2n \cdot \dot{y} + k^2 \cdot y = h \cdot \sin(p \cdot t), \quad (1)$$

где $n = \mu / (2m)$; μ – коэффициент пропорциональности в выражении для силы сопротивления среды: $\bar{F}_c = -\mu \cdot \bar{V}$; \bar{V} – скорость электродвигателя; $k = \sqrt{c/m}$ – круговая частота собственных колебаний системы; c – жёсткость конструкции: $c = (m \cdot g) / \Delta_{cm}$; $h = H/m$; p – круговая частота возмущающей силы: $p = \pi \cdot n_{дв} / 30$; t – время, отсчитываемое от момента включения электродвигателя.

При $p \neq k$ (отсутствие резонанса) и $n < k$ (движения – периодические) решением уравнения (1), как известно [2], является выражение:

$$y = e^{-nt} \cdot (C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \cos(k_1 \cdot t)) - \frac{2 \cdot h \cdot p \cdot n}{((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2)} \cdot \cos(p \cdot t) + \frac{h \cdot (k^2 - p^2)}{((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2)} \cdot \sin(p \cdot t), \quad (2)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{1}{k_1} \cdot \left[\dot{y}_0 + n \cdot y_0 + \frac{h \cdot p \cdot (2 \cdot n^2 - k^2 + p^2)}{((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2)} \right]; \quad (3)$$

$$C_2 = y_0 + \frac{2 \cdot h \cdot p \cdot n}{((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2)}; \quad (4)$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

При колебаниях в воздушной среде её сопротивление сравнительно невелико. Если им пренебречь, как это делают авторы упомянутого сборника заданий к выполнению расчетно-графических работ по курсу сопротивления материалов [8], т. е. принять $n=0$, то при нулевых начальных условиях ($t=0; y_0=0; \dot{y}_0=0$) выражение (2) с учетом (3) и (4) примет предельно простой вид:

$$y = -\frac{h \cdot p}{k \cdot (k^2 - p^2)} \cdot \sin(k \cdot t) + \frac{h}{(k^2 - p^2)} \cdot \sin(p \cdot t) = \frac{h}{k \cdot (k^2 - p^2)} \cdot (k \cdot \sin(p \cdot t) - p \cdot \sin(k \cdot t)) \quad (5)$$

Подсчитаем значения величин, входящих в выражение (5):

$$h = \frac{H}{m} = \frac{0,3m \cdot g}{m} = 0,3 \cdot g = 2,943 \text{ м/с}^2; \quad \rho = \pi \cdot n_{\text{дв}} / 30 = 104,720 \text{ с}^{-1}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{m \cdot \Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g}{m \cdot g \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}}, \quad (6)$$

где δ_{11} – прогиб конца балки (где установлен электродвигатель) под действием вертикальной единичной силы $P = 1$ (рис. 2).

Величину δ_{11} определим по правилу Верещагина, используя эпюру изгибающих моментов \bar{M} от единичной силы $P = 1$ (см. рис. 2):

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell = \frac{\ell^3}{3 \cdot E \cdot I_x} = \frac{3^3 \cdot 10^9}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 2,446 \cdot 10^{-3} \text{ мм/Н} =$$

$$= 2,446 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}$$

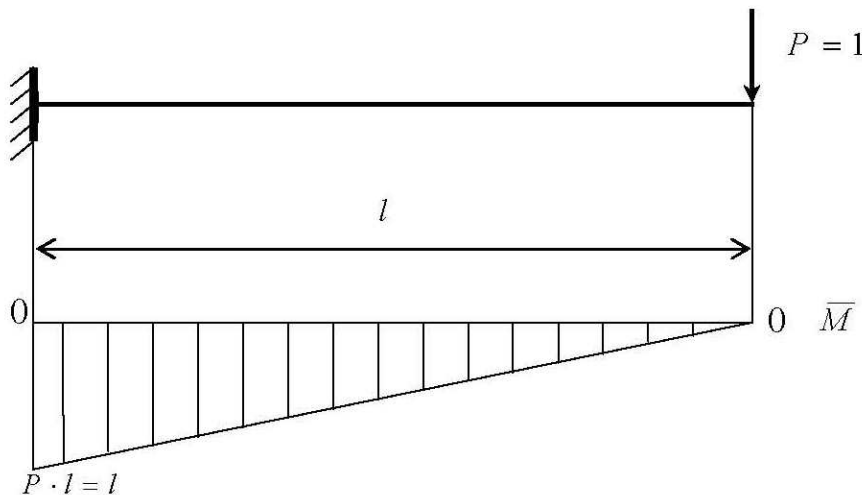


Рисунок 2 – Схема к определению δ_{11}

С учётом этого $k = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{1000 \cdot 2,446 \cdot 10^{-6}}} = 20,220 \text{ с}^{-1}$.

Подставив найденные значения величин в выражение (5), получим:

$$y = \frac{2,943 \cdot 10^3}{20,220 \cdot (20,220^2 - 104,720^2)} \times$$

$$\times (20,220 \cdot \sin(104,720 \cdot t) - 104,720 \cdot \sin(20,220 \cdot t)) =$$

$$= 1,444 \cdot \sin(20,220 \cdot t) - 0,279 \cdot \sin(104,720 \cdot t), \text{ мм} \quad (7)$$

График функции (7) представлен на рис. 3. Из него находим максимальное значение этой функции: $y_{\text{MAX}} \approx 1,7 \text{ мм}$.

Определяем максимальную нагрузку на балку в процессе колебаний:

$$Q_{\text{MAX}} = m \cdot g + c \cdot y_{\text{MAX}} = m \cdot g + \frac{y_{\text{MAX}}}{\delta_{11}} = 1000 \cdot 9,81 + \frac{1,7}{2,446 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 9810 + 695 = 10505 \text{ Н}$$

Максимальные нормальные напряжения в балке при этом составят:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{\bar{M}_{\text{MAX}}}{W_x} \cdot Q_{\text{MAX}} = \frac{\ell}{W_x} \cdot Q_{\text{MAX}} = \frac{3 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^3} \cdot 10505 = 171 \text{ МПа}.$$

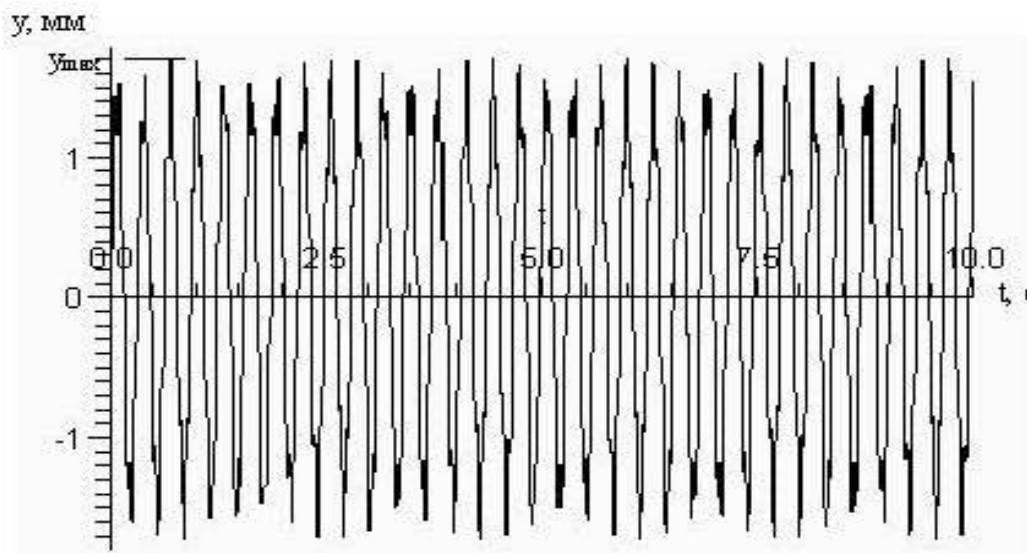


Рисунок 3 – График функции (7)

Сравним теперь этот результат с таковым, полученным при подсчёте по методике [7], в которой максимальная нагрузка на упругий элемент вычисляется через амплитуду вынужденных колебаний – A_2 или связанный с нею так называемый коэффициент нарастания амплитуды вынужденных колебаний – β :

$$Q_{\text{MAX}}^* = m \cdot g + c \cdot A_2 = m \cdot g + \beta \cdot H, \quad (8)$$

где

$$A_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2}}; \quad \beta = \frac{c \cdot A_2}{H} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right)^2 + \frac{4 \cdot p^2 \cdot n^2}{k^4}}} \quad (9)$$

При $n = 0$ выражение для β принимает вид:

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - (p/k)^2\right|}. \quad (10)$$

Тогда

$$Q_{\text{MAX}}^* = m \cdot g + \beta \cdot H = m \cdot g + \frac{H}{\left|1 - (p/k)^2\right|} = 1000 \cdot 9,81 + \frac{0,3 \cdot 1000 \cdot 9,81}{\left|1 - (104,720/20,220)^2\right|} = 9810 + 114 = 9924 \text{ Н};$$

$$\sigma_{\text{MAX}}^* = \frac{\bar{M}_{\text{MAX}}}{W_x} \cdot Q_{\text{MAX}}^* = \frac{\ell}{W_x} \cdot Q_{\text{MAX}}^* = \frac{3 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^3} \cdot 9924 = 162 \text{ МПа}.$$

Очевидно, что существующая методика расчёта [7] в сравнении с предлагаемой даёт заметно меньший результат. В рассмотренном примере это уменьшение составляет:

$$\frac{\sigma_{\text{MAX}} - \sigma_{\text{MAX}}^*}{\sigma_{\text{MAX}}} \cdot 100 = \frac{171 - 162}{171} \cdot 100 = 5,3\%.$$

Если же сравнивать только динамические составляющие максимальных напряжений по обеим методикам расчёта, то их отличие будет ещё более существенным.

Оценим теперь полученные результаты с более общих позиций. Пусть зависимость $y(t)$ описывается уравнением (5). Тогда:

$$Q_{\text{MAX}} = m \cdot g + c \cdot y_{\text{MAX}} = m \cdot g + c \cdot \frac{h}{k \cdot |k^2 - p^2|} \cdot f_{\text{MAX}}, \quad (11)$$

где f_{MAX} – максимальное значение функции

$$f = k \cdot \sin(p \cdot t) - p \cdot \sin(k \cdot t). \quad (12)$$

Очевидно, что $f_{\text{MAX}} \leq k + p$, т. е. что максимум функции (12), представляющей собой наложение друг на друга двух синусоид с разными круговыми частотами, не превышает суммы их амплитуд. Анализ ряда специально построенных графиков функции (12) с варьированием значений p и k показал, что с достаточной для практических расчётов точностью можно считать, $f_{\text{MAX}} \approx k + p$.

С учётом этого получим:

$$Q_{\text{MAX}} = m \cdot g + c \cdot \frac{h}{(k \cdot |k^2 - p^2|)} \cdot (k + p) = m \cdot g + \frac{c \cdot H \cdot (k + p)}{(k \cdot m \cdot |k^2 - p^2|)} = m \cdot g + \frac{k}{|k - p|} \cdot H;$$

$$Q_{\text{MAX}} = m \cdot g + \frac{1}{|1 - (p/k)|} \cdot H = m \cdot g + \gamma \cdot H, \quad (13)$$

где γ – безразмерный коэффициент:

$$\gamma = \frac{1}{|1 - (p/k)|}. \quad (14)$$

При расчёте по существующей методике [7] величина Q_{MAX}^* определяется по формуле (8) как $Q_{\text{MAX}}^* = m \cdot g + \beta \cdot H$.

Отношение динамических составляющих Q_{MAX} и Q_{MAX}^* составит:

$$\alpha = \frac{\gamma \cdot H}{\beta \cdot H} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{|1 - (p/k)|} \cdot |1 - (p/k)^2| = 1 + \frac{p}{k}. \quad (15)$$

Таким же будет и отношение динамических составляющих максимальных напряжений в конструкции. Проанализируем теперь выражение (15).

При $p < k$ величина α изменяется в пределах $1 < \alpha < 2$, т. е. расхождение результатов расчёта при использовании обеих методик не превышает двух раз. В случае же, когда $p > k$, величина α не имеет верхнего предела $\alpha > 2$, и расхождение результатов может быть сколь угодно большим.

Таким образом, при отсутствии сопротивления среды ($n = 0$) существующая методика расчета значительно занижает величины динамических усилий и напряжений в колеблющихся конструкциях, при этом степень этого занижения определяется отношением круговых частот возмущающей силы и собственных колебаний упругой системы.

При наличии сопротивления среды ($n > 0$) собственные колебания становятся затухающими и продолжительность биений сокращается. Однако и в этом случае $y_{\text{MAX}} \gg A_2$. Это хорошо видно из графика функции (2), построенного по числовым данным рассмотренной задачи и $n = 0,3 \cdot k$ (рис. 4). В данном случае y_{MAX} больше A_2 в 4,2 раза.

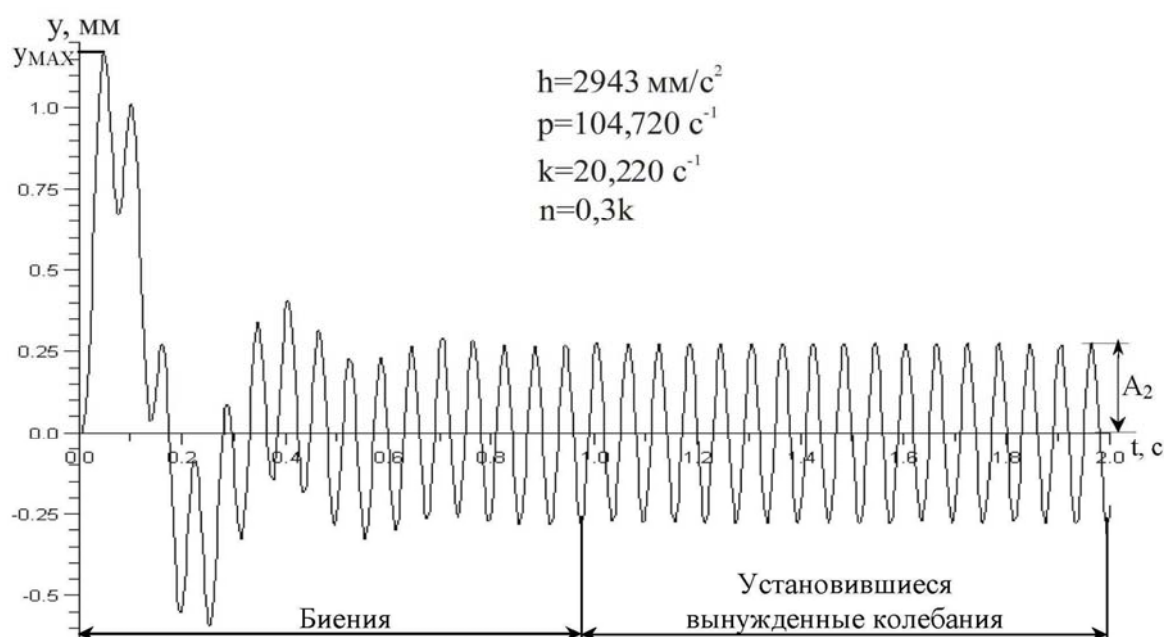


Рисунок 4– График функции (2)

Анализ подобных графиков, построенных с варьированием значения n , показал, что с ростом сопротивления среды отношение y_{MAX}/A_2 плавно уменьшается и при значениях n , близких к предельному ($n = k$), составляет около 3,0, т. е. остается довольно значительным и игнорировать это обстоятельство в практических расчетах нельзя.

Вывод. Существующая методика прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям, значительно занижает величины динамических усилий и напряжений в этих конструкциях.

При отсутствии сопротивления среды это занижение максимально и определяется отношением круговых частот возмущающей силы и собственных колебаний упругой системы.

Рост сопротивления среды уменьшает погрешности существующей методики, но полностью не устраняет их.

Для повышения точности и надежности расчетов целесообразно отказаться от практики определения максимальной нагрузки на упругий элемент через амплитуду вынужденных колебаний A_2 , а вместо неё использовать максимальное отклонение колеблющейся массы y_{\max} , определяемое по графику колебательного процесса, построенному с применением компьютерной техники. Такое изменение особенно актуально для колебаний в воздушной и других слабо сопротивляющихся средах.

Все вышеизложенное представляется полезным для студентов и преподавателей высших учебных заведений, читающих курсы сопротивления материалов и других смежных дисциплин, а также практических специалистов, выполняющих прочностные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: учебник для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / Н. Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Сопротивление материалов: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов / Г. С. Писаренко [и др.] – К. : Вища школа, 1986. – 775 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов: учебник для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 624 с.
4. Холодняк Ю. С. Прочностные расчеты в машиностроении и необходимость учета в них эквивалентных напряжений / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, Е. Ю. Роменский // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2006. – № 1 (6Е). – С. 74–80.
5. Особенности прочностного расчёта балок и их учет в изложении технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, А. В. Периг, А. А. Григорьев // «Качество образования – управление, сертификация, признание»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2011. – С. 463–469.
6. Холодняк Ю. С. О методике изложения вопросов прочности двутавровой балки / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // «Современное образование и интеграционные процессы»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. д.т.н., проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2012. – С. 351–362.
7. Холодняк Ю. С. О совершенствовании методики прочностных расчетов стержневых конструкций при вынужденных колебаниях и её изложения в курсах технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, И. А. Матвеев // «Качество образования: управление, сертификация, признание»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. д.т.н., проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2013. – С. 172–180.
8. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: нав. пос. / Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко [та ін.] – Краматорськ: ДДМА 2007. – 220 с.